А. Н. Андронов, А. Н. Мещеряков

Мордовский гуманитарный институт, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Ижевск, arbox@inbox.ru

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА S-МЕРНОЙ СФЕРЕ СО СМЕЩЕНИЕМ В ЗНАЧЕНИЯХ ПРОИЗВОДНЫХ ($S > 2$)

В работе вычисляются собственные значения и строятся собственные и присоединенные функции задачи для оператора Лапласа на s-мерной сфере ($s > 2$) со смещением в значениях производной. Рассматривается общий случай $s > 2$, т. е. задача

$$(\Delta + \lambda)\Phi^{(1)} = \frac{1}{r^{s-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{s-1}\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta \Phi^{(1)} + \lambda\Phi^{(1)} = 0,$$

$$\Phi^{(1)} \in C^{2+\alpha}(\Omega), \quad \Omega = \{r, \theta \mid r < 1, \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\},$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}(r_0, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^{(1)}(1, \theta)}{\partial r}. \tag{1}$$

Разделив переменные $\Phi^{(1)} = X^{(1)}Y(\theta)$, получим уравнение для полисферических функций

$$\Delta_\theta Y_{s,n} - n(n + s - 2)Y_{s,n} = 0$$

и после подстановки $X^{(1)}(r) = r^{-\frac{s}{2}+1}x(r)$ – уравнение Бесселя

$$x'' + \frac{1}{r}x' + \left[\lambda - \frac{(n + \frac{s}{2} - 1)^2}{r^2}\right]x = 0. \tag{2}$$

При этом в предположении ограниченности решения смещение (1) дает условие, определяющее собственные значения $\lambda = \alpha^2$

как корни уравнения

$$f(\alpha) = \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1} \right] +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]. \qquad (3)$$

Сопряженная задача имеет вид

$$(\Delta + \lambda)\Psi^{(1)} = 0, \Omega_1 = \{r \mid r < r_0\} \cup \Omega_2 = \{r \mid r_0 < r < 1\},$$
$$\Psi^{(1)\prime}_{\ r}(r_0 - 0, \theta) = \Psi^{(1)\prime}_{\ r}(r_0 + 0, \theta), \Psi^{(1)\prime}_{\ r}(1, \theta) = 0,$$
$$r_0^{s-1} \left[\Psi^{(1)}(r_0 - 0, \theta) - \Psi^{(1)}(r_0 + 0, \theta)\right] + \Psi^{(1)}(r_0 - 0, \theta) = 0,$$
$$\Psi^{(1)}(r, \theta) = \chi^{(1)}_{s,n}(r) Y_{s,n}(\theta).$$

Теорема. *Задача (1) имеет собственные значения* $\lambda = \alpha^2(n)$, *определяемые уравнением* (3) *с собственными функциями* $\Phi^{(1)}_n(r, \theta) = J_n(\alpha r) Y_{s,n}(\theta)$. *Ей отвечает сопряженная задача с теми же собственными значениями, которым соответствуют собственные функции* $\Phi^{(1)}(r, \theta) = \chi^{(1)}_{s,n}(r) Y_{s,n}(\theta)$.

Условие отсутствия присоединенных элементов Φ^2 можно найти, вычислив интеграл $I_{s,n}(\alpha) = \int_0^1 X^{(1)}_{s,n}(r)\chi^{(1)}_{s,n}(r) r^{s-1} dr$. Оно равносильно условию $f'(\alpha) \neq 0$. Условиями отсутствия присоединенных элементов последовательно более высоких порядков являются $f''(\alpha) \neq 0$, $f'''(\alpha) \neq 0$, причем показано, что на присоединенных элементах третьего порядка жордановы цепочки обрываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. *К теории нелокальных краевых задач* // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 277. – № 1. – С. 17–19.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции, Т. 2.* – М.: Наука, 1966. – 296 с.

4. Вайнберг М. М., Треногин В. А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.

5. Брычков Ю. А., Прудников А. П., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* – М.: Наука, 1983. – 798 с.

6. Логинов Б. В., Нагорный А. М. *О ветвлении решений задачи Бицадзе – Самарского для нелинейно-возмущенного уравнения Гельмгольца* // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Ташкент: ФАН, 1985. – С. 134–150.

В. В. Асеев, Т. А. Кергилова

Институт математики СО РАН, Горно-Алтайский государственный университет,

btp@math.nsc.ru, kergyl@gmail.com

МИНИМАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ МЁБИУСОВОСТИ

Инвариантность ангармонического отношения является определяющим признаком дробно-линейных преобразований на плоскости. В работах различных авторов (Haruki H., Rassias T.M., Kobayashi O.) изучался вопрос, при каких требованиях на отображение f условие сохранения им ангармонического отношения с фиксированным значением λ гарантирует мёбиусовость отображения f? Наиболее сильный результат на